Leçon 103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotient.

Cadre : Dans la suite $(G,.)$ est un groupe.

1. Sous-groupe distingué, groupe quotient. —

1. Sous-groupe distingué. —

- Def : Soit H un sous-groupe de G. On dit que H est distingué dans G et on note $H \triangleleft G$ ssi $\forall g \in G,\ gH = Hg$.
- Ex : $< r > \triangleleft D_n$ où D_n désigne le groupe diédral, groupe des isométries linéaires du plan préservant le n-gone régulier.
- Ex : Soient G, G' des groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. On a :
  i) Si $H \triangleleft G$ alors $f(H) \triangleleft G'$.
  ii) Si $H' \triangleleft G'$ alors $f^{-1}(H') \triangleleft G$.
  En particulier, $A_n \triangleleft \Sigma_n$, $Z(G) \triangleleft G$, $Sl_n(K) \triangleleft Gl_n(K)$.
- Ex : $SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R})$.
- Pro : Si G est abélien, tout sous-groupe de G est distingué dans G.
- Contre-ex : Tous les sous-groupes de H_8 (le groupe des quaternions) sont distingués mais H_8 n'est pas abélien.
- Pro : Tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.
  Plus généralement, pour G groupe fini, tout sous-groupe d'indice le plus petit diviseur premier de $|G|$.

2. Groupe quotient. —

- Def+Pro : Si $H \triangleleft G$, on peut munir l'ensemble quotient G/H d'une structure de groupe en posant $(gH).(g'H) = (gg'H)$.
- Ex : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $L^p := \mathscr{L}^p/N$ où N est le sous-groupe des fonctions de $\mathscr{L}^p$ nulles presque partout.
- Pro : La projection canonique $\pi : G \to G/H$ définit un morphisme de groupes surjectif de noyau H.
  Si de plus G est fini, alors $|G| = |G/H|.|H|$.
- Pro : π induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G contenant H, et l'ensemble des sous-groupes de G/H.
- Ex : Les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $(d\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z})$ où $d|n$.
- Thm (propriété universelle) : Soit $H \triangleleft G$, G' un groupe, et $\varphi : G \to G'$ morphisme tel que $H \subset Ker(\varphi)$.
  Alors $\exists !\ \overline{\varphi} : G/H \to G'$ tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.
- Ex : $(\mathbb{C}^*)/(\mathbb{R}_+^*) \simeq \mathbb{U}$. $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \simeq \mathscr{U}$, $(\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}, +) \simeq \mathbb{C}^*$.
- Thm : (3e thm d'isomorphie) $(H \triangleleft G$ et $H \subset K \triangleleft H) \Rightarrow (G/H)/(K/H) \simeq G/K$.

3. Sous-groupes caractéristiques. —

- Contre-ex : $H = < (1,2)(3,4) > \triangleleft K = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.
  $K \triangleleft A_4$ mais $H \ntriangleleft A_4$.
- Def : Un sous-groupe H est dit caractéristique si H est stable pour tout automorphisme de G. On note $H \sqsubset G$.
- Ex : $Z(G) \sqsubset G$. $<$ *carrés* $> \sqsubset G$.
- Rem : Si $H \sqsubset G$, alors $H \triangleleft G$.
- Def : Le groupe dérivé de G est $D(G) := < \{xyx^{-1}y^{-1},\ x, y \in G\} >$.
- Pro : $D(G) \sqsubset G$ et $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué H de G tel que G/H est abélien.
- Pro : Si $H \sqsubset K \triangleleft G$ alors $H \triangleleft G$.
  Si $H \sqsubset K \sqsubset G$ alors $H \sqsubset G$.

2. Produits directs et semi-directs de groupes. —

1. Produits directs. —

- Def : Soient G, G' deux groupes. On peut munir $G \times G'$ d'une structure de groupe en posant : $(g_1, g_1').(g_2, g_2') = (g_1g_2, g_1'g_2')$.
- Rem : $G \times \{e_G\} \triangleleft G \times G'$, $\{e_{G'}\} \times G \triangleleft G \times G'$.
- Thm : Soit G un groupe, et $G_1, G_2 < G$ avec :
  i) $G_1 \triangleleft G$, $G_2 \triangleleft G$.
  ii) $G_1 \cap G_2 = \{e\}$.
  iii) $G_1G_2 = G$.
  Alors $G \simeq G_1 \times G_2$.
- App : Théorème chinois : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (pgcd(n,m) = 1$.

2. Produits semi-directs. —

- Def : Soit G et N deux deux groupes, et $\varphi : G \to Aut(N)$ un morphisme. On peut munir $N \times G$ d'une structure de groupe en posant $(n,g).(n',g') = (n\varphi(h)(n'), hh')$
  On note ce groupe $N \rtimes_\varphi G$, le produit semi-direct de N par G relativement à φ.
- Rem : L'inverse de (n,h) est alors $(\varphi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$.
- Rem : $N \times \{e_G\} \triangleleft N \rtimes_\varphi G$, mais $\{e_N\} \times G$ n'est pas forcément distingué dans $N \rtimes_\varphi G$.
- Pro : On a l'équivalence :
  i) $\varphi(g) = Id_N\ \forall g \in G$.
  ii) $\{e_N\} \times G \triangleleft N \rtimes_\varphi G$
  iii) $N \rtimes_\varphi G \simeq N \times G$.
- Def : Soient N, H deux sous-groupes d'un groupe G, avec $N \triangleleft G$. Alors le produit direct intérieur $N \rtimes H$ est donné par $\varphi : h \mapsto (n \mapsto hnh^{-1})$.
- Pro : Sous les hypothèses précédentes, si de plus $N \cap H = \{e\}$ et $NH = G$ alors $G \simeq N \rtimes H$.
- Ex : $D_n \simeq < r > \rtimes < s >$.
  $\Sigma_n \simeq A_n \rtimes < (1,2) >$.
  Ces produits sont non-directs si $n \geq 3$.

3. Groupes simples. —

1. *Simplicité.* —

– Def : G est dit simple si il n'admet aucun sous-groupe distringué strict non-trivial.
– Pro : Les seuls groupes abéliens simples sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
– Thm : $PSL_n(K) := \frac{SL_n(K)}{Z(SL_n(K))}$ est simple sauf si $(n = 2)$ et $((K = \mathbb{F}_2)$ ou $(K = \mathbb{F}_3))$.
– **Dev** : Pour tout $n \geq 5$, le groupe alterné A_n est simple.
– Cor : Pour $n \geq 5$, le seul sous-groupe distingué non trivial de Σ_n est A_n.
– Cor : Pour $n \geq 5$, $D(\Sigma_n) = A_n$, $D(A_n) = A_n$.
– Théorème de Feit-Thompson (admis) : Tout groupe simple non banal est d'ordre pair.

2. *p-groupes et théorèmes de Sylow.* —

– Def : Un groupe H est un p-groupe ssi son ordre est une puissance de p.
– App : Théorème de Cauchy : Soit G un goupe fini et p premier divisant $|G|$. Alors G possède un élément d'ordre p.
– Cor : Un groupe G est un p-groupe ssi l'ordre de tout élément est une puissance de p.
– Pro : Pour G un p-groupe et $Z(G)$ son centre, on a $|Z(G)| \equiv 0 \; mod(p)$.
– App : Les p-groupes de cardinal p ou p^2 sont toujours abéliens.
– Def : Soit G un groupe fini de cardinal n. Soit p premier divisant n. Un sous-groupe H de G est un $p - Sylow$ de G ssi $|H| = p^{v_p(n)}$.
– Ex : Le groupe $UT_n(\mathbb{F}_p)$ des matrices trigonales supérieures avec des 1 sur la diagonale est un p-Sylow de $Gl_n(\mathbb{F}_p)$.
– Pro : Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Soit S un p-Sylow de H. Alors il existe un p-Sylow S' de G tel que $S = S' \cap H$.
– Théorèmes de Sylow : Soit G un groupe fini de cardinal n, et p premier divisant n.
i) G admet un p-Sylow.
ii) Tous les p-Sylow de G sont conjugués.
iii) Le nombre n_p de p-Sylow de G vérifie $n_p | \frac{n}{p^{v_p(n)}}$ et $n_p \equiv 1 \; mod(p)$.
– App : Un p-Sylow de G est distingué ssi $n_p = 1$.
– App : Tout groupe d'ordre 63 possède un sous-groupe distingué non-trivial.
– App : Tout groupe d'ordre pq avec $p < q$ premiers et $q \neq 1 \; mod(p)$ est cyclique.
– App : Tout groupe d'ordre $q^s p$ avec $q > p$ premiers,$s \geq 1$ ou d'ordre pqr avec p, q, r premiers n'est pas simple.
Par exemple, si $|G| \in \{18, 30, 42, 50, 54, 70\}$, il n'est pas simple.

4. Représentations linéaires et sous-groupes distingués. —

– Def : Une représentation linéaire ρ sur un groupe fini G est un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$ où V est un $\mathbb{C} - ev$ de dimension finie.
– Def : Le caractère χ_ρ d'une représentation linéaire ρ est l'application $g \in G \mapsto \chi_\rho(g) := Tr(\rho(g)) \in \mathbb{C}$.
– Def : Une sous-représentation d'une représentation $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation $\rho' : G \to GL(V')$ avec V' s-ev de V tel que $\forall g \in G$, V' est $\rho(g)$-stable avec $\rho(g)|_G = \rho'(g)$.
Une représentation est dite irréductible si elle n'admet aucune sous-représentation stricte non-triviale.
Un caractère irréductible est le caractère d'une représentation irréductible.
– Pro : Caractère d'une somme directe de représentations.
– Pro : Orthogonalité des caractères irréductibles pour le produit scalaire donné.
– Pro : Les caractères sont des fonctions centrales.
– Def : Table de caractères.
– Pro : Les colonnes d'une table de caractères sont orthogonales.
– Ex : Table de caractères de Σ_4, d'un groupe cyclique.
– **Dev** : Soit G un groupe d'ordre n. Soient $\rho_1, .., \rho_r$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphie des représentations irréductibles de G, et soient $\chi_1, .., \chi_r$ les caractères irréductibles associés.
On note $K_{\chi_i} := \{g \in G \text{ tq } \chi_i(g) = \chi_i(e)\}$.
Alors $K_{\chi_i} = Ker(\rho_i)$ et les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\cap_{i \in I} K_{\chi_i}$, pour tout $I \subset \{1, .., r\}$.
– Cor : G est simple ssi pour tout caractère irréductible χ non-trivial et $\forall g \neq e$ on a $\chi(g) \neq \chi(e)$.
– App : V_4 est le seul sous-groupe distingué non-trivial de A_4. (Table de caractères en annexe)
– App : Sous-groupes distingués de D_6. (Table de caractères en annexe)

Références

Perrin : Automorphisme intérieur, s-g distingué, un s-g distingué est réunion de classes de conjugaisons, G abélien ⇒ tout s-g est distingué, contre-ex. Groupe quotient, propriétés, propriété universelle, exemples. Centre, exemples. Groupes simples, propriétés, groupes d'ordre pq, morphismes sur un groupe simple, exemples. p-groupes, Th de Sylow, groupes d'ordre 63, applications.
Calais : S-g distingués, s-g d'indice 2 sont distingués, groupes quotients, 3e théorème d'isomorphie. S-g caractéristiques, exemples. Produits semi-directs, exemples Σ_n et D_n.
Ulmer : S-g caractéristiques, propriétés, exemples. Produit direct, Th chinois, exemples.
Combes : Centre d'un p-groupe, groupes d'ordre p^2 abéliens. Th de structure des groupes abéliens, exemple, exposant.
Lang : A_n est simple.(Dev)
Ertul Anatole, Prodhomme Maxime : Leçon 104.

January 23, 2018

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes